ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1993

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
OPTION P'
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II-P'.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option P', comporte 5 pages.

Dans ce problème, certaines questions posées peuvent être résolues de différentes manières ; par suite, il est conseillé aux candidats de bien préciser la méthode employée pour résoudre la question posée.

Notations

E : espace euclidien orienté de dimension 3.

L(E) : espace des endomorphismes de E.

GL(E) : groupe des automorphismes de E (endomorphismes inversibles).

det(f), tr(f) : déterminant, trace d'un endomorphisme f.

$(x \mid y)$: produit scalaire euclidien des deux vecteurs x et y de E.

$x \wedge y$: produit vectoriel des deux vecteurs x et y de E.

det(x , y , z) : déterminant des trois vecteurs x, y et z de E ; il est égal au produit mixte de ces vecteurs : $(x \wedge y \mid z)$.

f* : endomorphisme adjoint de l'endomorphisme f ; pour tout couple de vecteurs x et y de E, $(f^*(x) \mid y) = (x \mid f(y))$.

base de E : soit (e_1 , e_2 , e_3) une base de E ; les coordonnées d'un vecteur x de E seront notées x_1 , x_2 , x_3.

Rappel : La relation, dite du double produit vectoriel, sera admise ; pour tout triplet de vecteurs x, y, z de E : $x \wedge (y \wedge z) = (x \mid z)\, y - (x \mid y)\, z$.

Définition : Une application A de $E \times E$ dans E, $(x , y) \mapsto A(x , y)$ est une application **bilinéaire antisymétrique de** E si pour tout réel λ et tous vecteurs x, y, z de E :
$A(\lambda x + y , z) = \lambda\, A(x , z) + A(y , z)$ et $A(x , y) = -\, A(y , x)$.

Première partie

Etude sur un exemple d'une application bilinéaire antisymétrique de $\mathbb{R}^3$ et d'endomorphismes déduits de cette application.

L'espace $\mathbb{R}^3$ sera supposé muni du produit scalaire : $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la relation :
si x est le vecteur : $x = (x_1, x_2, x_3)$, h(x) est égal au vecteur : $(\frac{1}{2}x_3, \frac{1}{2}x_3, \frac{1}{2}(x_1+x_2))$.

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées : $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$. Soit [,] l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto [x, y]$ définie par la relation :

$$[x, y] = h(x \wedge y) + (u \mid y)\ x - (u \mid x)\ y \quad .$$

1°) Démontrer que cette application [,] est bilinéaire et antisymétrique. Déterminer les coordonnées du vecteur [x , y] ; vérifier que deux de ses coordonnées sont nulles. Etablir la propriété :
pour tout triplet x, y, z de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

2°) Soit $a = (a_1, a_2, a_3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$; soit φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, $x \mapsto [a, x]$. Déterminer l'endomorphisme composé $\varphi_a \circ \varphi_a = (\varphi_a)^2$ en fonction de φ_a ; déterminer de même l'endomorphisme composé de φ_a avec lui-même n-fois, $(\varphi_a)^n$, n=2,3,... Soit t un réel quelconque ; démontrer que la série de terme général $\frac{t^n}{n!}(\varphi_a)^n$ n=0,1,2... est convergente dans l'espace vectoriel de dimension finie $L(\mathbb{R}^3)$ muni d'une norme quelconque. L'application $(\varphi_a)^0$ est l'application identique. La somme de cette série sera notée :

$$\exp(t\varphi_a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(\varphi_a)^n \quad .$$

Exprimer cette somme au moyen de l'application identique et de l'application φ_a .

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère la loi de composition $*$, qui au couple des vecteurs x et y fait correspondre le vecteur $x*y$ défini par la relation :

$$x*y = (x_1 y_1, x_2 y_2, x_2 y_3 + x_3 y_1) \quad .$$

3°) a. Démontrer que cette application $*$ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ est une loi de composition associative.

b. Soit G le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$; démontrer que cet ensemble G est stable pour la loi de composition $*$. Démontrer que $(G, *)$ est un groupe.

4°) Soit $a = (a_1 , a_2 , a_3)$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$. Soit X une application inconnue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ continûment dérivable vérifiant les relations :
$\frac{d}{dt} X(t) = X(t) * a$ et $X(0) = e$, où e est le vecteur de coordonnées (1,1,0).

a. Soient $t \mapsto X_i(t)$ i=1,2,3 les trois fonctions coordonnées de la fonction vectorielle $t \mapsto X(t)$; démontrer que ces fonctions vérifient un système différentiel que l'on résoudra dans les deux cas : $a_1 = a_2$ et $a_1 \neq a_2$.

b. Démontrer que cette application X est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe $(G,*)$.

c. Soit t un réel donné ; comparer les deux endomorphismes $v \mapsto X(t) * v * X(-t)$ et $v \mapsto \exp(t\, \varphi_a)(v)$.

Deuxième partie

Etablissement de relations de base.

1°) a. Soit u un vecteur d'un espace euclidien orienté E de dimension 3. Démontrer que l'application $g_u : x \mapsto u \wedge x$ est un endomorphisme de E. Etablir que l'endomorphisme adjoint $(g_u)^*$ est égal à l'opposé de g_u : $(g_u)^* + g_u = 0$. Déterminer, suivant le vecteur u, le rang de g_u.

b. Soit réciproquement un endomorphisme f de E tel que f et son adjoint f* vérifient la relation $f + f^* = 0$. Démontrer qu'il existe un vecteur unique u de E tel que l'application g_u, définie ci-dessus, soit égale à f.

2°) Soient trois vecteurs quelconques x, y et z de E ; calculer l'expression :
$$v = x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) .$$

3°) Soit f un endomorphisme de E. Démontrer, pour tout triplet de vecteurs x, y, z de E, la relation :
(1) $\det(f(x) , y , z) + \det(x , f(y) , z) + \det(x, y , f(z)) = \mathrm{tr}(f) \det(x , y , z)$.

4°) Déduire de la relation (1) ci-dessus que tout endomorphisme f de E et tout couple de vecteurs x et y de E ont la propriété :
$$f(x \wedge y) = \mathrm{tr}(f)\, x \wedge y - f^*(x) \wedge y - x \wedge f^*(y) .$$

5°) a. Soient u et v deux vecteurs de E donnés ; soit f l'endomorphisme : $x \mapsto (v \mid x)\, u$; calculer la trace de f.

b. Démontrer que quatre vecteurs x, y, z et u quelconques de E vérifient la relation :
$$\det(u , y , z)\, x + \det(u , z , x)\, y + \det(u , x , y)\, z = \det(x , y , z)\, u .$$

Troisième partie

Crochets de Lie d'un espace vectoriel euclidien ; isomorphisme entre deux crochets de Lie.

Soit f un endomorphisme de E ; désignons par A_f l'application : $(x , y) \mapsto f(x \wedge y)$ de $E \times E$ dans E.

1°) a. Démontrer que l'application A_f est une application bilinéaire antisymétrique de E.

b. Réciproquement, soit une application bilinéaire antisymétrique B de E ; démontrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que B soit égale à A_f. C'est-à-dire, pour tout couple de vecteurs x et y de E : $B(x , y) = f(x \wedge y)$.
Il pourra être utile de considérer une base orthonormée directe (e_1 , e_2 , e_3).

2°) Soit toujours f un endomorphisme de E. Il sera admis que, pour trois vecteurs quelconques x, y, z de E, les applications f et A_f vérifient la relation :

$$A_f(x , A_f(y,z)) = \mathrm{tr}(f)\, f(x \wedge (y \wedge z)) - (f \circ f^*)(x \wedge (y \wedge z)) + (f(x) \mid y)\, f(z) - (f(x) \mid z)\, f(y) .$$

a. Démontrer l'existence d'un vecteur unique u de E tel que tout vecteur x de E vérifie la relation : $f(x) - f^*(x) = 2\, u \wedge x$.

b. Etablir la relation :
$A_f(x , A_f(y,z)) + A_f(y , A_f(z,x)) + A_f(z , A_f(x,y)) = 2 \det(x , y , z)\, f(u)$.

Par définition, l'application [,] de $E \times E$ dans E : $(x , y) \mapsto [x , y]$ bilinéaire et antisymétrique est **un crochet de Lie dans** E si tout triplet de vecteurs x, y, z de E vérifie la relation :

$$[x , [y , z]] + [y , [z , x]] + [z , [x , y]] = 0 .$$

3°) Démontrer qu'une application [,] de $E \times E$ dans E, bilinéaire et antisymétrique est un crochet de Lie dans E si et seulement s'il existe un endomorphisme h de E et un vecteur u de E tels que :

- h est autoadjoint : $h^* = h$
- $h(u) = 0$
- pour tout couple de vecteurs x et y de E :

$$(2) \qquad [x , y] = h(x \wedge y) + (u \mid y)\, x - (u \mid x)\, y \quad .$$

Il sera utile de considérer pour un endomorphisme f de E, les deux endomorphismes $\frac{1}{2}(f + f^*)$ et $\frac{1}{2}(f - f^*)$. Démontrer que le couple (h , u) ainsi associé au crochet de Lie [,] est unique.

Par définition, deux crochets de Lie $[\ ,\ ]_1$ et $[\ ,\ ]_2$ dans E sont **isomorphes**, s'il existe un automorphisme f de E ($f \in GL(E)$), tel que tout couple de vecteurs x et y de E vérifie la relation :

$$[x\ ,\ y]_2 = f([f^{-1}(x)\ ,\ f^{-1}(y)]_1)\ .$$

4°) Soit $\mathfrak{L}$ l'ensemble des crochets de Lie dans E ; démontrer que la relation "les crochets de Lie $[\ ,\ ]_1$ et $[\ ,\ ]_2$ dans E sont isomorphes" est une relation d'équivalence dans $\mathfrak{L}$.

5°) Soient $[\ ,\ ]_1$ et $[\ ,\ ]_2$ deux crochets de Lie dans E ; soient $(h_1\ ,\ u_1)$ et $(h_2\ ,\ u_2)$ les deux couples d'éléments de l'espace $L(E) \times E$ associés respectivement à ces crochets de Lie (relation (2)).

a. Démontrer que, pour que les deux crochets de Lie $[\ ,\ ]_1$ et $[\ ,\ ]_2$ soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe un automorphisme f de E tel que, pour tout triplet de vecteurs x, y, z de E, il vienne :

$$\det(x\ ,\ y\ ,\ h_2(z)) - \frac{1}{\det(f)}\ \det(x\ ,\ y\ ,\ f^{*}\circ h_1 \circ f(z)) = (f^{-1}(u_1) - u_2 \mid y).(x \mid z) - (f^{-1}(u_1) - u_2 \mid x).(y \mid z)\ .$$

b. En déduire qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les deux crochets de Lie $[\ ,\ ]_1$ et $[\ ,\ ]_2$ soient isomorphes, est qu'il existe un automorphisme f de E et deux relations qui expriment h_2 en fonction de h_1 et u_2 en fonction de u_1. Préciser ces deux relations.

c. Démontrer que si les deux crochets de Lie $[\ ,\ ]_1$ et $[\ ,\ ]_2$ sont isomorphes, les couples $(h_1\ ,\ u_1)$ et $(h_2\ ,\ u_2)$ ont les propriétés :

- $u_1 \neq 0 \Rightarrow u_2 \neq 0$
- Les applications h_1 et h_2 ont même rang
- Pour que l'endomorphisme h_1 admette au moins une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, il faut et il suffit que l'endomorphisme h_2 ait cette même propriété.

Il pourra être utile d'associer à un endomorphisme autoadjoint h ($h = h^*$) l'application Q_h définie par la relation : $x \mapsto (h(x) \mid x)$ de E dans $\mathbb{R}$.

FIN DU PROBLÈME